

COMPARACIÓN DE LA PRECISIÓN DE LOS MODELOS GEOPOTENCIALES GLOBALES EGM08 Y EGM96 EN LA ZONA DEL CARIBE

ELADIO E. MARTINEZ TORO

Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Topografía

Email: eladio_martinez@yahoo.com

ABELARDO BETHENCOURT FERNANDEZ

Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Topografía

E-mail: abe.bethe@gmail.com

Resumen: Recientemente fue publicado un nuevo modelo geopotencial global, el EGM08. Este modelo ha mostrado una notable mejoría en la calidad de sus tres fuentes de datos; las observaciones del movimiento perturbado de los satélites artificiales, la altimetría por satélite y la gravimetría terrestre, por lo que se ha conseguido mejorar su precisión. En Puerto Rico, nuestra área de estudio, encontramos que al comprar las diferencias de los incrementos de la ondulación del geoide geométrico (calculado con medidas de campo) con los valores de los incrementos de la ondulación del geoide obtenidos utilizando estos modelos geopotenciales globales, la precisión del EGM08 fue $\pm 0,029$ metros mientras que la precisión del EGM96 fue $\pm 0,055$ metros. Estos resultados demuestran que en nuestra región, el modelo EGM08 ha presentado una mejoría considerable sobre su predecesor el EGM96 al momento de determinar los valores de los incrementos de la ondulación del geoide.

Palabras claves: EGM96, EGM08, Modelos Geopotenciales, Ondulación del Geoide.

Abstract: Recently, the new global geopotential model, the EGM08 was published. This model has shown a marked improvement in the quality of its three sources of data; the observations of the disturbed motion of artificial satellites, satellite altimetry and terrestrial gravity, so it has improved its precision. In our study area, Puerto Rico, we found that when we compare the differences of the increments of the geometric geoid undulation (computed with field data) with the values of the increments of the geoid undulation obtained using these models, the EGM08 accuracy was $\pm 0,029$ meters, while the EGM96 accuracy was $\pm 0,055$ meters. These results confirm that in our region, the EGM08 model has presented a significant improvement over its predecessor the EGM96 when determining the values of the increments of the geoid undulation.

Key words: EGM96, EGM08, Geopotential Models, Geoid Undulation.

1. INTRODUCCIÓN

La forma tradicional de obtener las altitudes ha sido a partir de las redes de nivelación de alta precisión que materializan la componente vertical del sistema de referencia. Sin embargo estas redes son muy costosas y difíciles de mantener, por lo que muchos países carecen de esta

infraestructura. Aún teniéndola, las obtención de altitudes precisas por estos métodos clásicos además de ser muy complicada, requiere una costosa inversión en tiempo y dinero. Un ejemplo de esto es la problemática aun existente en el momento de determinar rigurosamente las altitudes ortométricas. La obtención de estas altitudes se hace muy complicada ya que nos enfrentamos al problema de tener que evaluar el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada cuando consideramos los efectos de la topografía del terreno [TEN05]. Así pues, disponer de una superficie equipotencial de referencia como datum altimétrico preciso o geoide local es de gran importancia por cuanto ello nos permitiría determinar las altitudes ortométricas de forma eficiente a partir de las altitudes elipsoídicas proporcionadas por el Sistema Global de Navegación por Satélite (*Global Navigation Satellite System, GNSS*). Si bien esto es cierto para cualquier país tanto más lo es para aquellas regiones que carecen de una red de nivelación, como es el caso de algunas zonas en el Caribe, específicamente en el área de Puerto Rico.

Como es sabido uno de los problemas no resuelto de la geodesia (quizás el más importante de los mismos) es la carencia de un datum altimétrico global [SJO11]. El Geoide, definido como la superficie equipotencial que mejor se ajusta (en el sentido de los mínimos cuadrados) al nivel medio del mar en una determinada época no es accesible actualmente desde los datums altimétricos locales, con suficiente precisión, por lo que resulta imposible la unificación de los mismos. Al no existir un datum altimétrico global que nos permita obtener los valores absolutos de la ondulación del geoide, es necesario emplear modelos geopotenciales como alternativa. Los modelos geopotenciales pueden dividirse en globales y regionales. Los modelos globales vienen dados por los coeficientes de Stokes correspondientes al desarrollo del potencial en armónicos esféricos y algunas otras constantes que los determinan. Sus valores se obtienen esencialmente mediante tres fuentes de datos. Los que proceden de la observación del movimiento perturbado de los satélites

artificiales de la Tierra que contribuye proporcionando los coeficientes de menor grado (mayor longitud de onda). La altimetría de satélite, que permite disponer de valores asociados a los océanos y por último de gravimetría terrestre (y muy recientemente aerotransportada) a partir de los que se determinan los coeficientes de mayor grado y por lo tanto de mayor resolución (menor longitud de onda). Durante mucho tiempo el mejor Modelo Geopotencial Global (*Earth Gravitational Model, EGM*) para fines geodésicos fue el EGM96, de grado y orden 360, con una resolución de 55,5 km. [LEM98]. Recientemente fue publicado el modelo EGM08 en el que ha habido una notable mejoría en las tres fuentes de datos mencionadas anteriormente y por lo cual se ha conseguido un desarrollo hasta el grado y orden 2159 y una sustancial mejora en la precisión [PAV08]. A partir de estos modelos geopotenciales globales es posible calcular las magnitudes gravimétricas derivadas, en particular el geoide.

Cuando en una región determinada se dispone de valores de gravedad y modelos digitales del terreno de calidad es posible obtener modelos de superficies geopotenciales más precisas y de mayor resolución que los modelos globales. Estas superficies equipotenciales locales ajustadas al datum altimétrico nacional o regional no son estrictamente hablando un geoide, aunque en la literatura científica abunda esta terminología especificando a veces para ellos el término “local” (véase Ibergeo 95 [SEV95] o el Geoide de 2009 (GEOID09) [ROM11], adoptaremos en adelante esta terminología. Para su realización se parte de un modelo global que constituye una primera aproximación, a partir de la cual mediante variaciones introducidas a la fórmula de Stokes (que es la solución al problema de valores de contorno geodésico), se calcula una malla de valores de ondulación del geoide para la citada región. El modelo geopotencial regional considerado en esta investigación será el GEOID09 desarrollado por el Servicio Nacional Geodésico de los Estados Unidos de América (*National Geodetic Survey, NGS*) [ROM11].

El objetivo principal de esta investigación es determinar qué modelo geopotencial global se ajusta mejor a la región de Puerto Rico y con cuánta precisión podemos determinar los valores absolutos de la ondulación del geoide partiendo de estos modelos geopotenciales. Para ello se utilizó como referencia la única línea de nivelación geométrica existente en la isla. A partir de la cual fue necesario:

- (1º) Determinar los valores de las altitudes ortométricas y las altitudes elipsóidicas en las estaciones a lo largo de la línea de nivelación.
- (2º) Combinar estos resultados para obtener los incrementos de la ondulación del geoide geométrico entre las estaciones de referencia de la línea de nivelación.

- (3º) Comparar los valores de los incrementos de ondulación del geoide así obtenidos con aquellos calculados a partir de los modelos geopotenciales globales y regionales.

2. METODOLOGIA

2.1 Sistemas de Altitudes:

Uno de los sistemas de altitudes más utilizado es el de las altitudes ortométricas (H). Se definen como la distancia geométrica entre un punto y el geoide medida a lo largo de la línea de la plomada. Las altitudes elipsóidicas (h) son aquellas que se obtienen con Sistemas de Posicionamiento Global (*Global Positioning Systems, GPS*). Se definen como la distancia al elipsoide medida a lo largo de su normal y están adscritas al sistema y marco de referencia específicos en que se hayan realizado las medidas GNSS. El elipsoide asociado a los modernos sistemas de referencia es el Sistema de Referencia Geodésica de 1980 (*Geodetic Reference System 1980, GRS 80*) [MOR00], que coincide en la práctica con el elipsoide del sistema de referencia WGS84. En este trabajo nos referiremos en adelante al marco de referencia del Datum de Norte América de 1983, NAD 83 (CORS96/2007), época 2002.00.

La diferencia (fig. 1) entre la altitud geodésica h y la altitud ortométrica H se denomina ondulación del N^{Geo} :

$$N^{Geo} = h - H \quad \text{Eq. (1)}$$

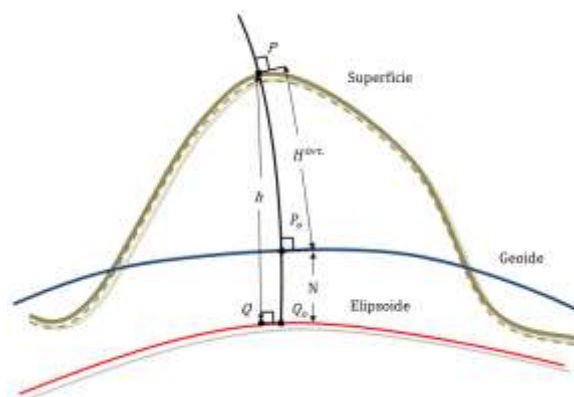


Figura 1. Sistemas de Altitudes

2.2 Altitudes Ortométricas:

La altitud ortométrica $H^{ort.}$ viene dada por la siguiente ecuación [HEI67]:

$$H^{ort} = \frac{C_p}{g} \quad \text{Eq. (2)}$$

Donde:

- C_p : número geopotencial
- \bar{g} : valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada

La cota geopotencial [HEI67] está definida como:

$$C_p = W_o - W_p \quad \text{Eq. (3)}$$

Donde:

- W_o : potencial gravitatorio al datum altimétrico
- W_p : potencial gravitatorio en el punto P

Asumiendo las hipótesis de Poincaré Prey [HEI67] se llega a un tipo específico de altitudes ortométricas denominadas Altitudes ortométricas Helmert, que se obtienen mediante la expresión [HEI67]:

$$H^{Helm} = \frac{C_p}{g + 0,0424H^{Helm}} \quad \text{Eq. (4)}$$

Donde sí C_p se mide en unidades geopotenciales (u.g.p.) y g en gales, H resultará en kilómetros.

Para evaluar la precisión de las altitudes ortométricas partimos de la Eq. (2), de la que por derivación se obtiene:

$$\delta H = \left(\frac{dC_p}{g} \right) - \left(\frac{C_p}{g^2} \right) \delta \bar{g} \quad \text{Eq. (5)}$$

De la Eq. (2) también podemos deducir que:

$$C_p = H \bar{g} \quad \text{Eq. (6)}$$

Si sustituimos la Eq. (6) en la Eq. (5), podemos simplificar la ecuación de la siguiente manera:

$$\delta H = \left(\frac{dC_p}{g} \right) - \left(\frac{H}{g} \right) \delta \bar{g} \quad \text{Eq. (7)}$$

Donde el error de la altitud ortométrica se atiene a la siguiente expresión:

$$\sigma_H^2 = \left(\frac{\sigma_{C_p}^2}{g^2} \right) + \left(\frac{H}{g} \right)^2 \sigma_{\bar{g}}^2 \quad \text{Eq. (8)}$$

Si consideramos que el número geopotencial C_p es igual a la gravedad observada (g) multiplicada por el desnivel (dn):

$$dC_p = g * dn \quad \text{Eq. (9)}$$

Podemos decir que;

$$\sigma_{C_p}^2 = g^2 * \sigma_n^2 \quad \text{Eq. (10)}$$

Sustituyendo la Eq. (10) en la Eq. (8) y dado que el valor de $\left(\frac{g}{g} \right)^2$ se aproxima a 1, la ecuación quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\sigma_H^2 = \sigma_n^2 + \left(\frac{H}{g} \right)^2 \sigma_{\bar{g}}^2 \quad \text{Eq. (11)}$$

Donde:

- σ_H : error de la altitud ortométrica
- σ_n : error relativo a la nivelación
- $\sigma_{\bar{g}}$: error del valor medio de la gravedad

Como hemos mencionado, el término σ_n se define como el error relativo a la nivelación. En nuestro caso, la línea de nivelación es una de Primer Orden, Segunda Clase, donde el máximo error permitido es $0,7 * \sqrt{L_{Km.}} mm$. [FGC84], donde L es la distancia nivelada entre las estaciones de referencia expresada en kilómetros. El error relativo a la nivelación finalmente quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\sigma_n^2 = 0,7^2 * L_{Km.} mm. \quad \text{Eq. (12)}$$

El término de la altitud ortométrica dividido entre el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\left(\frac{H}{g} \right)^2 = \left(\frac{H_m}{g_{gal}} \right)^2 * 10^4 s^4 \quad \text{Eq. (13)}$$

Donde la altitud ortométrica H debe estar en metros y el valor medio de la gravedad \bar{g} en gales.

El error cometido cuando calculamos el valor medio de la gravedad ($\sigma_{\bar{g}}$) utilizando solamente la aproximación de Helmert va a depender de tres factores fundamentales: el

error asociado a la gravedad medida en la superficie σ_g , al error en el tratamiento de la topografía del terreno asociado a la reducción de Prey σ_t , y al error asociado al valor considerado constante de la densidad de la Tierra $\sigma_{\delta\rho}$, quedando expresado de la siguiente manera:

$$\sigma_g^2 = \sigma_g^2 + \sigma_t^2 + \sigma_{\delta\rho}^2 \quad \text{Eq. (14)}$$

Ya que los datos de gravedad están referenciados al IGNS71 cuya precisión es $\pm 2\mu\text{ms}^{-2}$ [TOR89] y que la altitud máxima en nuestro caso no sobrepasa los 200 metros, podemos acotar el error de σ_g por:

$$\left(\frac{H}{g}\right)\sigma_g < \left(\frac{200}{9}\right) * 2 * 10^{-6}$$

Teniendo en cuenta estos valores, podemos considerar despreciable el error asociado a σ_g . Entonces la Eq. (14) quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\sigma_g^2 = \sigma_t^2 + \sigma_{\delta\rho}^2 \quad \text{Eq. (15)}$$

Para determinar el error asociado al valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada σ_g , primeramente tomaremos en cuenta los errores asociados al modelo de Prey [HEI67] por su consideración del relieve como una meseta plana σ_t . En la Tabla 1, podemos ver los resultados de los estudios de Niethammer [NIE32] y Mader [MAD54] quienes computaron altitudes ortométricas a una altitud de 2.504 metros en Hochtor, los Alpes utilizando la aproximación de Helmert y los métodos más precisos que tomaban en cuenta la topografía del terreno.

Helmert	$\bar{g} = 980.263 \text{ mgal}$
Niethammer	$\bar{g} = 980.286 \text{ mgal}$
Mader	$\bar{g} = 980.285 \text{ mgal}$

Tabla 1: Resultados trabajos de Helmert, Niethammer y Mader

Claramente se puede apreciar que el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada obtenido por Niethammer y Mader, en los que ambos consideraron el relieve del terreno, es muy próximo mientras que el valor correspondiente a la reducción de Prey, que no considera el relieve del terreno (tal como se emplea en el cálculo de las altitudes ortométricas Helmert) tiene una diferencia con ellos de 22,5 mgal.

Utilizando estos resultados como referencia y haciendo un reparto proporcional, encontramos que el máximo error correspondiente a la altitud máxima en nuestra línea de nivelación, que es de 147,903 metros, sería de 1,329 mgal. Redondeando al alza, tomamos 1,5 mgal como el valor máximo del error esperado por no considerar el relieve de la topografía del terreno en nuestra línea.

Puesto que:

$$1,5 \text{ mgal.} = 1,5 * 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 1,5 * 10^{-2} \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

Por lo tanto, error que considera el relieve del terreno sería equivalente a:

$$\sigma_t^2 = 1,5^2 * 10^{-4} \frac{\text{mm}^2}{\text{s}^4} \quad \text{Eq. (16)}$$

Para definir el error relativo por asumir que la densidad de la Tierra es constante $\sigma_{\delta\rho}$, modificando la ecuación de la Lámina de Bouger [HEI67], se obtiene la siguiente expresión:

$$\sigma_{\delta\rho}^2 = 2\pi G \delta\rho H \quad \text{Eq. (17)}$$

Donde:

- G : constante gravitacional de la Tierra
 $= 6,67 * 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
- $\delta\rho$: error por asumir la densidad de la Tierra constante

Considerando que la mayor diferencia que hay en la corteza terrestre entre la densidad de la roca más densa a la menos densa es de $0,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ [HEI67], utilizaremos el valor promedio de $\delta\rho = 0,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Resolviendo y simplificando la Eq. (17) obtendremos la siguiente expresión:

$$\sigma_{\delta\rho}^2 = 12,6 * H_{\text{km}}^2 * 10^{-4} \frac{\text{mm}^2}{\text{s}^4} \quad \text{Eq. (18)}$$

Luego de determinar las aproximaciones por considerar el relieve del terreno como una meseta plana σ_t y por asumir que la densidad de la Tierra constante $\sigma_{\delta\rho}$, sustituimos la Eq. (15) en la Eq. (11), y obtenemos la ecuación que nos permitirá determinar el error de las altitudes ortométricas Helmert:

$$\sigma_H^2 = \sigma_n^2 + \left[\left(\frac{H}{g} \right)^2 * \sigma_t^2 + \sigma_{\delta_p}^2 \right] \quad \text{Eq. (19)}$$

Luego, sustituyendo en la Eq. (19) el error relativo a la nivelación σ_n , Eq. (12), el término de la altitud ortométrica dividido entre el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada elevados al cuadrado $\left(\frac{H}{g} \right)^2$, Eq. (13), además de las aproximaciones que presentamos para corregir los errores por no considerar el relieve de la topografía del terreno σ_t , Eq. (16) y por asumir que la densidad de la Tierra constante σ_{δ_p} , Eq. (18), obtenemos la ecuación ya simplificada para determinar la desviación estándar de la altitud ortométrica expresada en milímetros:

$$\sigma_H = \sqrt{\left(0,7^2 * L_{km.} + \left[\left(\frac{H_{m.}}{g_{gal.}} \right)^2 * 1,5^2 + 12,6 * H_{km.}^2 \right] \right)_{mm.}} \quad \text{Eq. (20)}$$

Donde:

- $L_{km.}$: distancia nivelada entre estaciones de referencia (kilómetros)
- H : altura ortométrica (en metros o kilómetros, según sea el caso)

Para computar \bar{g} en cada estación de referencia fue utilizada la siguiente expresión [HEI67]:

$$\bar{g} = g_o + 0,0424 H_{km.} \quad \text{Eq. (21)}$$

Donde:

- g_o : gravedad observada en el punto P (gales)

2.3 Modelos Geopotenciales:

Con el advenimiento del GNSS se ha incrementado grandemente la necesidad de desarrollar modelos del geoide regionales o globales altamente precisos. Como es sabido, el GNSS nos proporciona altitudes elipsoidicas de una manera altamente eficiente y con gran precisión (algunos centímetros). Por lo tanto si disponemos de modelos que nos proporcionen los valores de la ondulación del geoide con la misma precisión, podremos calcular altitudes ortométricas precisas que es lo que se requiere en la mayor parte de los trabajos realizados por las instituciones cartográficas y en la ingeniería civil. Para el área de Puerto Rico, el modelo geopotencial regional más reciente es el GEOID09 [ROM11]. Este modelo utiliza como referencia el modelo geopotencial global EGM08.

Como hemos mencionado, uno de los modelos geopotenciales más utilizado en los pasados años fue el EGM96. Este modelo estaba expresado por los coeficientes del desarrollo armónico del potencial hasta el grado y orden de 360. El EGM96 [LEM98] fue el resultado del trabajo en conjunto de la Agencia Nacional de Imágenes y Cartografía de los Estados Unidos de América (*National Imagery and Mapping Agency, NIMA*), la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (*National Aeronautic and Space Administration, NASA*) y la Universidad Estatal de Ohio. La gran ventaja de este proyecto fue que por primera vez se utilizaron conjuntos nuevos de datos de gravedad de diferentes regiones del mundo para desarrollar un modelo geopotencial global.

Los modelos geopotenciales globales usualmente carecen de la resolución y precisión necesaria. Por esta razón algunos países con los recursos disponibles, se dieron a la tarea de desarrollar sus propios modelos geopotenciales regionales, alcanzando una mejor precisión y resolución que los modelos geopotenciales globales. Esta situación cambió drásticamente cuando el 17 de abril de 2008, la Agencia Nacional de Inteligencia-Geoespacial (*National Geospatial-Intelligence Agency, NGA*) antes NIMA, reveló oficialmente el modelo global más reciente y preciso del campo gravitacional de la tierra: el Modelo Geopotencial de la Tierra del 2008 (EGM08) [PAV08]. Este nuevo modelo geopotencial global no sólo describe el campo de la gravedad para el planeta entero, sino que su resolución se aproxima a la precisión y resolución de los modelos regionales. De la misma manera que el WGS-84 sustituyó los marcos de referencias locales y regionales (datum) proporcionando uniformidad y una consistencia muy necesaria entre los usuarios del Departamento de Defensa, el EGM08 permite mejorar la precisión en la obtención de altitudes ortométricas mediante un modelo global.

Recientemente, la comunidad científica ha mostrado un gran interés en la realización de estudios que permitan evaluar y validar el modelo geopotencial global EGM08 en diferentes partes del mundo. En los estudios de Kotsakis, C., et al., [KOT10] en Grecia, se encontró que al momento de determinar las ondulaciones del geoide combinando datos GPS y nivelación con los modelos geopotenciales, el EGM08 presentó una notable mejoría (sobre el 50%) en comparación con los resultados obtenidos utilizando los modelos geopotenciales anteriores. De la misma manera, Jekeli, C., et al., [JET09] en Corea del Sur encontró que al determinar las ondulaciones del geoide utilizando datos GPS y nivelación combinados con el EGM08, el mismo mostro una desviación estándar de 18,5 cm., mientras que los resultados con el EGM96 mostraron una desviación estándar de 27,4 cm. Los trabajos de Bursa, M., et al., [BUR09] demuestran que a nivel global, el modelo EGM08 presenta una disminución de un 33,9% en su desviación estándar al momento de compararla con la desviación

estándar de su modelo predecesor, el EGM96. También se ha encontrado que al comparar la precisión del EGM08 con los modelos geopotenciales regionales, los resultados han sido similares. Es el caso de los trabajos de Huang, J., et al., en Canadá, donde se encontró que al combinar el EGM08 con datos GPS y nivelación, su precisión era comparable con la del Modelo Gravimétrico del Geoide de Canadá del 2005 (CGG05) [HUA09]. Aunque este modelo geopotencial global todavía está limitado por errores de comisión y omisión, se ha demostrado que el mismo es superior a los modelos anteriores, como el EGM96 en su precisión y la resolución.

El modelo geopotencial regional disponible para la zona de Puerto Rico es el GEOID09. El GEOID09 [ROM11] es un modelo híbrido del geoide que combina información gravimétrica del Geoide Gravimétrico de los Estados Unidos de América de 2009 (*United States Gravimetric Geoid 2009, USGG2009*) referenciado a su vez al EGM08, con altitudes elipsoidicas obtenidas utilizando GPS referenciado al Datum de Norte América de 1983 (*North American Datum 1983, NAD 83*) y altitudes ortométricas referenciadas al Datum Vertical de Norte América de 1988 (*North American Vertical Datum 1988, NAVD-88*). Este modelo regional fue desarrollado para la parte continental de los Estados Unidos de América y luego extrapolado matemáticamente a las regiones del Caribe, por lo que su precisión y exactitud en esta región puede no corresponderse con la nominalmente dada.

El USGG2009 [ROM10] se basa en una cuadrícula de gravedad de $1' \times 1'$ derivada de la base de datos de gravedad superficial del NGS, de las anomalías derivadas de la altimetría del Centro Nacional Danés de Datos Espaciales de 2008 (*Danish National Space Center 2008 data set, DNSC08*), del modelo digital de elevación del terreno de 3 segundos de arco de resolución de la Misión Topográfica de Radar a Bordo del Transbordador (*Shuttle Radar Topography Mission – 3 arc seconds resolution, SRTM- 3*) para la reducción topográfica y del modelo de gravitacional global EGM08 como un modelo de referencia. El NGS ha estado desarrollando modelos del geoide para los Estados Unidos de América durante casi dos décadas, comenzando con GEOID90 [MIL91]. Los modelos anteriores del geoide desarrollados por el NGS se computaron mediante la combinación de las anomalías de Faye (anomalías de la gravedad corregidas en la superficie del terreno) con modelos geopotenciales globales. La técnica utilizada fue la de eliminación-restitución. El grado más alto de los últimos modelos geopotenciales desarrollados por el NGS nunca había superado el grado y orden de 360. Las grandes longitudes de onda obtenidas mediante satélites contenidos en los modelos anteriores estaban muy lejos de ser perfectas. La misión satelital del Experimento de Clima y Recuperación Gravitatoria (*Gravity Recovery and Climate Experiment, GRACE*) [TAP05] cambió todo esto, dando lugar a los modelos geopotenciales globales modernos como el EGM08. Este modelo fue desarrollado gracias a la combinación de los coeficientes de menor grado altamente

precisos del modelo geopotencial basado en GRACE, las anomalías de gravedad derivadas de altimetría y de los Modelos Digitales de Elevación de alta resolución.

2.4 Datum Vertical de Puerto Rico del 2002 (*Puerto Rico Vertical Datum 2002, PRVD02*):

Para validar estos modelos geopotenciales, fue necesario utilizar como referencia la única línea de nivelación geométrica de alta precisión existente en Puerto Rico, conocida como el Datum Vertical de Puerto Rico del 2002 (*Puerto Rico Vertical Datum 2002, PRVD02*). En la actualidad, el PRVD02 se encuentra en su primera fase y consiste de una línea de nivelación de aproximadamente 160 kilómetros, orientada de este a oeste a lo largo de la zona norte de la isla de Puerto Rico. Esta fase del proyecto fue realizado por personal de NGS durante el periodo de enero a mayo del 2002. Es notable destacar que la estación con mayor elevación sobre el nivel del mar en se encuentra a 147,903 metros mientras que la de menor elevación se encuentra a 1,004 metros. Para determinar este datum vertical, fue necesario establecer una estación de referencia asociada a un mareógrafo el cual se encuentra ubicado en uno de los muelles de la ciudad capital, San Juan de Puerto Rico. Este mareógrafo está a cargo del Centro de Operaciones, Productos y Servicios Oceanográficos del Gobierno de los Estados Unidos de América. El mismo fue monitoreado por un periodo de 17 años, desde 1983 hasta el 2001. La altura ortométrica fue computada por el personal del NGS en la primavera del 2003 utilizando valores de la gravedad modelada. El valor de la altitud ortométrica asignada a la estación de referencia fue 1,334 metros. Partiendo de esta estación y utilizando métodos de nivelación geométrica de alta precisión, fueron determinadas las elevaciones de las demás estaciones asociadas al PRVD02.

3. RESULTADOS

3.1 Altitudes Ortométricas:

Las altitudes ortométricas fueron calculadas utilizando el método de Helmert presentado en la sección anterior. Previo a esta tarea, fue necesario realizar varias campañas de observaciones gravimétricas durante los meses de enero y febrero de 2010 que nos permitieran determinar el valor de la gravedad en la superficie y así poder computar el valor del número geopotencial en cada una de las estaciones del PRVD02. Se utilizó como referencia una estación la cual se encuentra ubicada en el Viejo San Juan, capital de Puerto Rico. Esta estación, identificada como 975 5371 A TIDAL, tiene publicado su valor de gravedad y la altitud ortométrica referida al mareógrafo VM 1386 que materializa el datum altimétrico de Puerto Rico. Con estos datos, fue posible computar el valor del número geopotencial en esta estación y luego, utilizando los valores de la gravedad observada en

cada una de las demás estaciones, se computó el valor del número geopotencial en cada una de ellas. Finalmente, fueron calculadas las altitudes ortométricas Helmert en cada estación utilizando la Eq. (4) y aplicando la Eq. (20) determinamos su desviación estándar encontrando un valor máximo de $\pm 0,0074$ metros.

3.2 Altitudes Elipsoídicas:

Para determinar las altitudes elipsoídicas con la mayor precisión posible fue necesario realizar varias campañas de observaciones utilizando receptores de GPS entre los meses de septiembre a octubre de 2009 y enero de 2010. Se realizaron un total de 18 sesiones de observaciones durante 9 días no consecutivos. Se utilizaron un total de 13 receptores GPS de doble frecuencia las cuales se configuraron para hacer lecturas cada segundo. Se estableció como norma que se realizarían observaciones simultáneas con una duración promedio de dos horas. Mientras un receptor permanecía fijo durante dos sesiones consecutivas en una estación, los demás receptores se trasladarían a la estación más cercana. Siempre se repitió la observación en una estación la cual hubiese sido observada en una sesión previa. Para realizar el ajuste se utilizaron las coordenadas de una estación la cual esta referenciada al marco NAD 83 (CORS96/2007), época 2002.00. Se consideraron un total de 302 líneas base y utilizando la aplicación de Leica, Leica Geo Office (LGO) se post procesaron los datos determinando las coordenadas con la mayor precisión posible en 70 estaciones de la línea de nivelación PRVD02 encontrando una desviación estándar máxima de $\pm 0,0053$ metros.

3.3 Ondulación del Geoide Geométrico:

Para computar el valor de la ondulación del geoide geométrico N^{Geo} , se utilizó la Eq. (1), donde h es el valor de la altitud elipsoídica en metros, obtenida mediante el ajuste de la línea de nivelación utilizando la aplicación de Leica y la H el valor de la altitud ortométrica Helmert calculada en metros.

La precisión de la ondulación del geoide geométrico fue computada considerando la desviación estándar máxima de la altitud elipsoídica y de la altitud ortométrica. Como hemos mencionado, el valor máximo de la desviación estándar de la altitud elipsoídica fue de $\pm 0,0053$ metros mientras que la desviación estándar máxima de la altitud ortométrica fue de $\pm 0,0074$ metros.

Utilizando la Eq. (22) logramos determinar la desviación estándar de la ondulación del geoide geométrico:

$$\sigma_{N^{Geo}} = \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_H^2} \quad \text{Eq. (22)}$$

Donde:

- $\sigma_{N^{Geo}}$: error de la ondulación del geoide geométrico (metros)
- σ_h^2 : varianza de la altitud elipsoídica (metros)
- σ_H^2 : varianza de la altitud ortométrica (metros)

Encontramos que el error de la ondulación del geoide geométrico fue:

$$\sigma_{N^{Geo}} = \pm 0,0091 \text{ m}$$

Esto indica que la ondulación del geoide geométrico, computado utilizando los datos de campo, va a tener una precisión que estará por debajo del centímetro. Precisión mucho mayor que la de los modelos globales y regionales con los que en el mejor de los casos, se podría obtener una precisión de al menos $\pm 2,8$ cm. como es el caso del GEOID09 [ROM11].

3.4 Análisis de los incrementos de la ondulación del geoide:

Los valores absolutos de la ondulación del geoide utilizando el modelo geopotencial global EGM96 [LEM98] se calcularon utilizando un paquete de datos desarrollado por NIMA. Los valores absolutos de la ondulación de geoide con el EGM08 [PAV08] fueron determinados utilizando una aplicación en FORTRAN llamada hsynth_WGS84. La Eq. (23) nos muestra la ecuación que utiliza esta aplicación determinar los valores de la ondulación del geoide:

$$N = \frac{GM}{\gamma^2 \gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_n^m \cos m\lambda + \bar{S}_n^m \sin m\lambda \bar{P} \cos \theta \quad \text{Eq. (23)}$$

Donde:

- a : semi eje mayor de elipsoide de referencia
- r : distancia del centro del elipsoide al punto P
- M : masa terrestre localizada en el interior del elipsoide
- G : constante gravitacional universal
- γ : gravedad normal en el punto P
- \bar{P} : funciones de Legendre
- \bar{C}_n^m, \bar{S}_n^m : constantes de Stokes
- θ, λ : colatitud geocéntrica y longitud en el punto P

Los valores absolutos de la ondulación del geoide utilizando el modelo geopotencial regional GEOID09 [ROM11] fueron determinados utilizando una aplicación de la página web del NGS que nos permiten computar dichos valores.

Al determinar los valores de la ondulación del geoide utilizando los modelos geopotenciales globales, cuando los comparamos con los valores de la ondulación del geoide obtenidos con el modelo geopotencial regional y con los valores de ondulación del geoide geométrico, se encontraron diferencias del rango de los dos metros. En la Tabla 2 podemos apreciar un detalle de los resultados obtenidos para el cómputo de los valores de la ondulación de geoide:

Estación de Origen		975 5371 A TIDAL	
Latitud	18,45895453	N^{Geo}	-42,978 m
Longitud	-66,11644616	N^{EGM96}	-44,242 m
Altitud Geodésica	-41,644 m	N^{EGM08}	-45,199 m
Altitud Ortométrica	1,334 m	$N^{GEOID09}$	-42,993 m

Tabla 2. Resultados del cómputo de los valores de la ondulación del geoide

Donde:

- N^{EGM96} : ondulación del geoide EGM96 (metros)
- N^{EGM08} : ondulación del geoide EGM08 (metros)
- $N^{GEOID09}$: ondulación del geoide GEOID09 (metros)

Puesto que cada modelo tiene un origen (datum) diferente, procedimos a analizar los incrementos de la ondulación del geoide. Al momento de realizar este ejercicio, el factor de diferencia de datum se elimina y no se ve afectado el resultado. Se procedió entonces a determinar las diferencias entre los incrementos de la ondulación del geoide de cada uno de los modelos con los incrementos de la ondulación del geoide geométrico utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \Delta N^{Geo-EGM96} = \Delta N^{Geo} - \Delta N^{EGM96} \quad \text{Eq. (24)}$$

$$\nabla \Delta N^{Geo-EGM08} = \Delta N^{Geo} - \Delta N^{EGM08} \quad \text{Eq. (25)}$$

$$\nabla \Delta N^{Geo-GEOID09} = \Delta N^{Geo} - \Delta N^{GEOID09} \quad \text{Eq. (26)}$$

La precisión de cada modelo fue determinada utilizando la Eq. (27) que nos permite determinar la desviación estándar aplicada a las diferencias de los incrementos de la ondulación de geoide para cada uno de los modelos:

$$\sigma_{\nabla \Delta N^{Geo-Modelo}} = \sqrt{\frac{\sum (\delta_i - \delta^{Ave})^2}{n}} \quad \text{Eq. (27)}$$

Donde:

- δ_i : Diferencia de los incrementos de la ondulación del geoide entre estaciones de referencia (metros)
- δ^{Ave} : Promedio de los incrementos de la ondulación del geoide (metros)
- n : Número de estaciones de referencia observadas (66)

En la Tabla 3 se presentan los resultados encontrados en el análisis de los incrementos:

	$\nabla \Delta_{maximo}$	$\nabla \Delta_{minimo}$	σ
$\nabla \Delta N^{Geo-EGM96}$	0,370 m	0,001 m	$\pm 0,055$ m
$\nabla \Delta N^{Geo-EGM08}$	0,126 m	0,001 m	$\pm 0,029$ m
$\nabla \Delta N^{Geo-GEOID09}$	0,127 m	0,001 m	$\pm 0,029$ m

Tabla 3. Resultados del análisis de los incrementos de la ondulación del geoide

Es notable resaltar que al igual que en los trabajos de Kotsakis [KOT10], Jekeli [JEK09] y Bursa [BUR09], el EGM08 supera notablemente la precisión del EGM96. De la misma manera podemos decir que como en los trabajos de Huang [HUA09], el EGM08 tiene una precisión comparable con la de un modelo geopotencial regional, cumpliendo así con las expectativas de los desarrolladores del EGM08 que indicaron que este modelo comparará en su calidad con los modelos geopotenciales regionales y locales [PAV08].

3.5 Análisis de los incrementos de la ondulación del geoide al considerar la distancia entre líneas bases observadas y las diferencias de elevación entre las estaciones:

Una de las interrogantes planteadas al principio de la investigación era si la distancia de las líneas bases observadas y las diferencias en la altitud ortométrica entre las estaciones afectarían de alguna manera los resultados del análisis de los incrementos de la ondulación del geoide. Para realizar este análisis se consideraron un total de 201 líneas base que fueron observadas con GPS. Se procedió a determinar las distancias existentes entre las estaciones que conformaban las líneas base que interesábamos analizar. Luego se procedió a determinar las diferencias de la altitud ortométrica entre estas estaciones. Utilizando los valores absolutos de la ondulación del geoide, tanto geométrico como el de los modelos geopotenciales, se procedió a computar los incrementos entre las estaciones. Finalmente computamos las diferencias entre los incrementos de la ondulación del geoide geométrico y los incrementos de la ondulación del geoide de los modelos geopotenciales.

Como podemos observar en la Figura 2 donde se muestran las Diferencias en los Incrementos de la Ondulación del Geoide considerando la distancia entre las líneas base, analizando el comportamiento del EGM96 (línea entrecortada), al calcular $\Delta N^{Geo} - \Delta N^{EGM96}$ mientras mayor es la distancia entre las líneas base, mayor es la diferencia entre los incrementos de la ondulación del geoide, algo que no sucede con el EGM08.

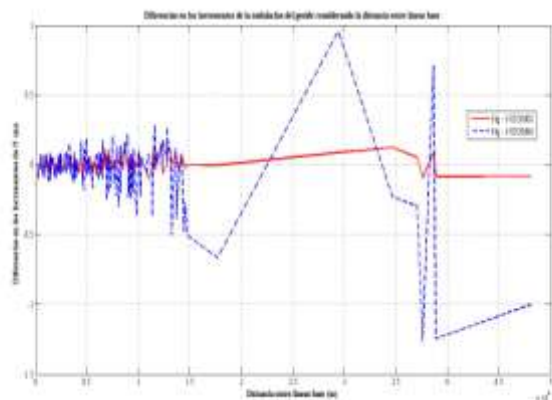


Figura 2. Diferencias de los incrementos de la ondulación del geoide considerando las distancias

En el caso de la Figura 3 donde se presentan las Diferencias de los Incrementos de las Ondulación de los Geoide considerando las diferencias de altitud entre líneas base, si analizamos el comportamiento del EGM96 (línea entrecortada) cuando calculamos el $\Delta N^{Geo} - \Delta N^{EGM96}$, su comportamiento es muy irregular, en contraste con el EGM08 que muestra un comportamiento muy regular, sin importar las diferencias de altitud entre las líneas base.

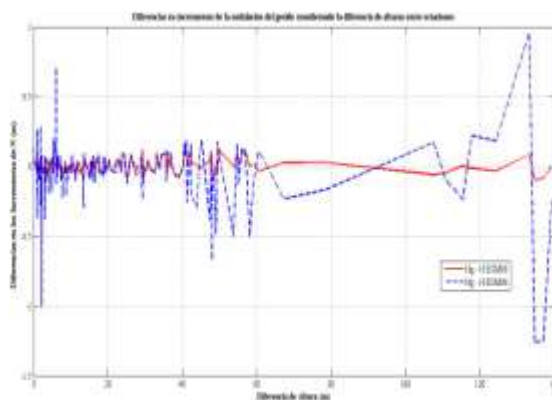


Figura 3. Diferencias de los incrementos de la ondulación del geoide considerando las diferencias de altitud

Este análisis muestra lo sensitivo que era el modelo geopotencial EGM96 ante los incrementos de la distancia y de la diferencia en altitud. De la misma manera podemos decir que el modelo geopotencial EGM08 no se ve afectado por estas variaciones.

3.6 Ajuste de los valores absolutos de la ondulación del geoide obtenidos utilizando los modelos geopotenciales:

Como habíamos mencionado anteriormente, los valores absolutos de la ondulación del geoide de los distintos modelos geopotenciales difieren unos de otros debido a que el origen o datum de cada modelo es diferente. Por esta razón fue

necesario realizarle un ajuste a los valores obtenidos con los modelos geopotenciales para corregir esta diferencia y así poder aplicarlos directamente.

Las diferencias de los valores absolutos de la ondulación del geoide fueron determinados utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\delta_i = N^{Geo} - N^{EGM96} \quad \text{Eq. (28)}$$

$$\delta_i = N^{Geo} - N^{EGM08} \quad \text{Eq. (29)}$$

Al determinar el promedio de las diferencias de los valores absolutos de la ondulación del geoide, obtuvimos los siguientes resultados:

$$\delta^{Ave} N^{Geo} - N^{EGM96} = 1,5752 m.$$

$$\delta^{Ave} N^{Geo} - N^{EGM08} = 2,1252 m.$$

Introduciendo este ajuste al valor absoluto de la ondulación del geoide obtenido utilizando los modelos geopotenciales, obtenemos entonces lo que conoceremos como el valor ajustado de la ondulación del geoide.

$$N_{Adj}^{EGM96} = N^{EGM96} + 1,5752 m. \quad \text{Eq. (30)}$$

$$N_{Adj}^{EGM08} = N^{EGM08} + 2,1252 m. \quad \text{Eq. (31)}$$

El procedimiento utilizado para determinar la precisión de los valores ajustados de la ondulación del geoide fue similar al procedimiento utilizado para determinar la precisión de los incrementos de la ondulación del geoide. En este caso calculamos directamente las diferencias entre los valores absolutos de la ondulación del geoide geométrico y los valores absolutos ajustados de la ondulación del geoide obtenido con los modelos geopotenciales. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$\sigma_{N_{Adj}^{EGM96}} = \pm 0,3021 m.$$

$$\sigma_{N_{Adj}^{EGM08}} = \pm 0,0303 m.$$

Al determinar la precisión del GEOID09 utilizando los valores directos de la ondulación del geoide sin ajustar, encontramos la misma fue:

$$\sigma_{N^{GEOID09}} = \pm 0,0366 m.$$

Lo que demuestra que efectivamente la precisión del modelo EGM08 es comparable y en algunos casos superior con la de los modelos geopotenciales regionales.

En las Figuras 4 y 5 se presentan las gráficas con los resultados del ajuste de los valores obtenidos de la ondulación del geode utilizando los modelos geopotenciales EGM96 y EGM08 respectivamente comparado a su vez con los valores obtenidos de la ondulación del geode geométrico (línea continua).

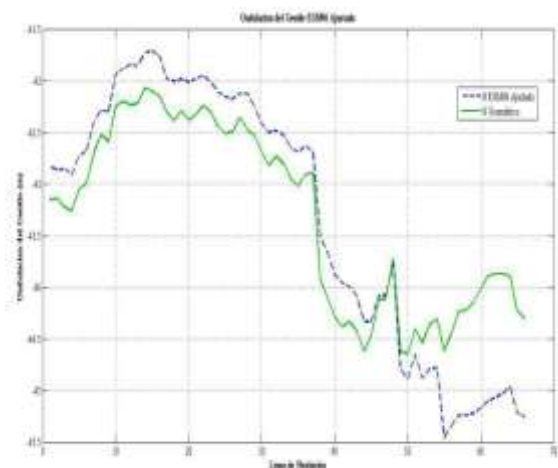


Figura 4. Ondulación del geode obtenido con el EGM96 ajustado

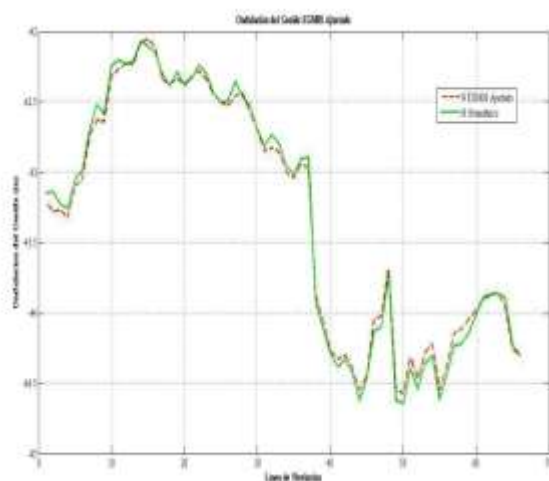


Figura 5. Ondulación del geode obtenido con el EGM08 ajustado

Claramente podemos observar en la Figura 4 que el EGM96 Ajustado no coincide con la ondulación del geode geométrico. Un comportamiento completamente diferente al del EGM08 Ajustado de la Figura 5 donde hemos podido demostrar que es posible obtener resultados con una precisión aproximada de $\pm 0,03$ metros. Cumpliendo así con las expectativas de sus desarrolladores, que indicaban que el EGM08 alcanzaría una precisión similar a la de los modelos geopotenciales regionales [PAV08] contrario a lo sucedido con el EGM96 que su precisión fue de $\pm 0,3$ metros.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como resultado de esta investigación fue posible desarrollar una metodología rigurosa para la determinación de las altitudes elipsoídicas y el cómputo de las altitudes ortométricas Helmert, sus errores y los procedimientos para obtenerlas. Además se logró determinar la calidad y precisión de los modelos geopotenciales globales EGM96 y EGM08 para la región de Puerto Rico. Se encontró además que el modelo geopotencial global EGM08 no se ven afectado con las variaciones de distancia y altitud entre las líneas base, algo que contrasta grandemente con el EGM96 el cual se vio bastante afectado ante estas variaciones. Al comparar estos modelos geopotenciales globales con el modelo geopotencial regional GEOID09 podemos decir que aunque el EGM08 mejoró por mucho a su predecesor, cuando comparamos el EGM08 con un modelo geopotencial regional, encontramos que ambos tienen prácticamente la misma precisión. Hay que tener presente que el modelo geopotencial regional GEOID09 es un modelo híbrido, ajustado con observaciones de GPS, extrapolado matemáticamente hacia la región de Puerto Rico y que utiliza como fuente de datos el modelo EGM08. Todo esto podría ser indicativo de la necesidad existente de desarrollar un modelo regional del geode que nos permita obtener los valores de la ondulación del geode con una mayor precisión para poder determinar las altitudes ortométricas con una mayor precisión.

REFERENCIAS

- [BUR09] Bursa, M., Kenyon, S., Kouba, J., Sima, Z., Vatrt, V., Vojtiskova, M., 2009. Results of EGM08 geopotential model testing and its comparison with EGM96. *Newton's Bulletin*, Vol. 4, 50-56.
- [FGC84] Federal Geodetic Control Committee, Standards and Specifications for Geodetic Control Networks, September 1984. http://www.ngs.noaa.gov/FGCS/tech_pub/1984-stds-specs-geodetic-control-networks.htm
- [HEI67] Heiskanen, W., Moritz, H., 1967. *Physical Geodesy*. Freeman and Company, San Francisco, USA.
- [HUA09] Huang, J., Veronneau, M., 2009. Evaluation of the GRACE-based global gravity models in Canada. *Newton's Bulletin*, Vol. 4, 3-17.
- [JEK09] Jekeli, C., Yanh, H.J., Kwon, J.H., 2009. Evaluation of EGM08—globally and locally in South Korea. *Newton's Bulletin*, Vol. 4, 38-49.
- [LEM98] Lemoine, F., Kenyon, S., Factor, J., Trimmer, R., Pavlis, N., Chinn, D., Cox, C., Klosko, S., Luthcke, S., Torrence, M. et al., 1998. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM 96, NASA.
- [KOT10] Kotsakis, C., Katsambalos, K., Ampatzidis, D., Gianniou, M., 2010. Evaluation of EGM08 using GPS and leveling heights in Greece. *Gravity, Geoid and Earth Observation*, 481-488.
- [MAD54] Mader, K., 1954. Die orthometrische Schwerekorrektur des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern (The orthometric weight correction of precision leveling in high terrain). Wien, Österreichischer Verein für Vermessungswesen.

- [MIL91] Milbert, D., 1991. Computing GPS-derived orthometric heights with the GEOID 90 geoid height model. In: Proceedings of GIS/LIS. Vol. 91.
- [MOR00] Moritz, H., 2000. Geodetic Reference System 1980, Journal of Geodesy, Vol. 74, Num. 1, 128-133. Springer.
- [NIE32] Niethammer, T., 1932. Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshohen (Levelling and weight as a means for the computation of true sea level heights). Druck von E. Birkhauser; zu beziehen durch den Kartenverlag der Schweizerischen Landestopographie in Bern
- [PAV08] Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C., and Factor, J.K., 2008. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13-18.
- [ROM10] Roman, D., Wang, Y., Saleh, J., Li, X., 2010. A gravimetric geoid model for the United States: The development and evaluation of USGG2009. Tech. Rep., NOAA/National Geodetic Survey.
- [ROM11] Roman, D., Wang, Y., Saleh, J., Li, X., 2011. Final National Models for the United States: Development of GEOID09. Tech. Rep., NOAA/National Geodetic Survey.
- [SEV95] Sevilla, M.J., 1995. A new gravimetric geoid in the Iberian Peninsula. Bulletin d'information-Bureau Gravimetrique International, Vol. 77, 163--180, BGI Gravimetrique International.
- [SJO11] Sjoberg, L.E., 2011. On the Definition and Realization of a Global Vertical Datum. Journal of Geodetic Science 1 (2), 154-157.
- [TAP05] Tapley, B., Ries, J., Bettadpur, S., Chambers, D., Cheng, M., Condi, F., Gunter, B., Kang, Z., Nagel, P., Pastor, R., et al., 2005. GGM02 an improved Earth gravity field model from GRACE. Journal of Geodesy 79 (8), 467-478.
- [TEN05] Tenzer, R., Vanicek, P., Santos, M., Featherstone, W.E., Kuhn, M., 2005. The rigorous determination of orthometric heights. Journal of Geodesy 79 (1), 82-92.
- [TOR89] Torgue, W., 1989. Gravimetry. Walter de Gruyter, Berlin - New York.
- Eladio E. Martínez Toro:** Estudiante de Doctorado en Ingeniería Geográfica de la Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía, Departamento de Ingeniería Topográfica y Cartografía desde enero de 2009. Área de Investigación: Geodesia, Geodesia Física y Espacial. Agrimensor graduado de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, Departamento de Ingeniería Civil y Agrimensura en junio de 2003. Agrimensor en Entrenamiento del Colegio de Ingenieros y Agrimensores de Puerto Rico (CIAPR), Certificado #20368.
- Abelardo Bethencourt Fernández:** Doctor en Ciencias Físicas. Ingeniero Geógrafo del estado (en excedencia). Catedrático de Escuela Universitaria en la Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía, Director del Departamento de Ingeniería Topográfica y Cartografía. Madrid, España.